www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

École Supérieure de Gestion

CONCOURS D'ENTRÉE 1989

CONCOURS FORMULE GENERALE
EPREUVE DE MATHEMATIQUES I
DUREE : 4 HEURES
COEFFICIENT : 3

EXERCICE D' ALGEBRE.

Soit A une matrice carrée d'ordre 2, notée $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} A^k = \begin{bmatrix} x_n & z_n \\ y_n & t_n \end{bmatrix}$

et par définition, on dira que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si les quatre suites (x_n) , (y_n) , (z_n) et (t_n) sont convergentes.

On pose alors $\lim x_n = X$, $\lim y_n = Y$, $\lim z_n = Z$, $\lim t_n = T$ et on définit la limite de S_n par $\lim S_n = \begin{bmatrix} X & Z \\ Y & T \end{bmatrix} = e^A$. (exponentielle de A).

1) Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Justifier l'existence de e^A et e^B et les calculer.

b) Calculer $e^A e^B$.

c) Soit $C = A + B$. Justifier l'existence de e^C et la calculer en fonction de $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et de C.

Quelle conclusion en tirez vous ?

2) Soit $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Diagonaliser M . On donnera P et $D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ telles que $M = PDP^{-1}$

b) Montrer que $e^D = \begin{bmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{bmatrix}$

3) En déduire e^M.

TSVP

PROBLEME D' ANALYSE.

On notera $E = C_0([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$, et E' l'espace vectoriel des fonctions définies sur $[0,1]$.
Pour tout $f \in E$ on pose $\Phi(f)=F$ où F est définie sur $[0,1]$ par :

$$F(t) = \int_0^t e^{-tx} f(x)\, dx$$

1) Soit Φ l'application de E dans E' qui à f associe F. Montrer que Φ est linéaire.

2) Soit f une fonction de classe C_1 sur $[0,1]$. On note $F^* = \Phi(f')$ où f' désigne la dérivée de f.

a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ $\quad F^*(t) = tF(t) + e^{-t^2} f(t) - f(0)$

b) En déduire l'expression de $F(t)$ en fonction de $F^*(t)$ pour $t \neq 0$.

3) Soit ω la fonction nulle sur $[0,1]$ et f_0 la fonction définie par $f_0(x) = 1$, $\forall\, x \in [0,1]$.

a) Calculer $\Phi(\omega)$ et en déduire $F_0=\Phi(f_0)$.

b) Etudier les variations de F_0 et tracer son graphe. (On précisera les demi tangentes en 0 et 1).

4) Soit f_n , $n \in \mathbb{N}$, la famille de fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$f_n(t)=t^n$ pour $n \geq 1$ et $f_0(t)=1$ On note $F_n=\Phi(f_n)$.

a) Montrer que, pour $n \geq 1$, $\quad F_n(t) = (n F_{n-1}(t) - t^n e^{-t^2})/ t$

b) Calculer F_1 et F_2.

c) Montrer qu' il existe un polynôme P_n , dont on précisera le degré, tel que : $\quad F_n(t) = (n ! + e^{-t^2} P_n(t)) / t^{n+1}$

5) Soit $f(x) = e^{\alpha x}$ sur $[0,1]$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Calculer $F(t)$ pour $t \neq \alpha$ puis pour $t = \alpha$ dans le cas où $\alpha \in [0,1]$.

b) Etudier la continuité de F en α dans le cas où $\alpha \in [0,1]$.

6) Pour $f \in E$ on pose $M = \mathrm{Sup}\ \{\ |f(x)|\ ,\ x \in [0,1]\ \}$.

a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ et $t' \in [0,1]$:

$$|\ F(t) - F(t')\ | \leq \left|\ \int_0^{t'} (e^{-tx} - e^{-t'x}) f(x)dx\ \right| + \left|\ \int_t^{t'} e^{-tx} f(x)dx\ \right|$$

b) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ et $t' \in [0,1]$:

$$|\ F(t) - F(t')\ | \leq 2M\ |\ t - t'\ |$$

c) En déduire que $F \in E$ et que $\Phi \in L(E)$.

7) On considère l'application $\Psi : E \to E$ qui à f associe G définie sur $[0,1]$ par : $\quad G(t) = \int_0^t f(x)\, dx$

a) Justifier, rapidement , que $G \in E$ et $\Psi \in L(E)$.

b) Déterminer $\Psi(f_0)$ puis $\Phi \circ \Psi(f_0)$ pour f_0 définie à la question 3.

c) Calculer $K(t,s) = \int_s^t e^{-tu}\, du$ $\quad$ d) Calculer $H(t) = \int_0^t K(t,s)\, f_0(s)\, ds$

e) Vérifier que $H = \Phi \circ \Psi(f_0)$.

TSVP

PROBABILITES.

Les objets produits par une usine sont numérotés 1,2,...n,... dans l'ordre de production , $n \in \mathbb{N}^*$.
Certains objets sont défectueux . On pose $X_n = 1$ ou 0 selon que le n-ième objet est défectueux ou non et $P(X_n = 1) = p$ avec $0 < p < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Certains objets sont contrôlés. On pose $Y_n = 1$ ou 0 selon que le n-ième objet est contrôlé ou non et $P(Y_n = 1) = q$ avec $0 < q < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de même loi de Bernouilli ,paramètre p sont indépendantes entre elles.
Les variables aléatoires $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de même loi de Bernouilli ,paramètre q sont indépendantes entre elles et les X_n sont indépendantes des Y_n.
On pose $Z_n = X_n Y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) a) Quelle est la loi de probabilité de Z_n ?
b) Montrer que les Z_n sont indépendantes entre elles.

2) On pose $S_n = \sum_{k=n}^{k=n} X_k$ et $T_n = \sum_{k=n}^{k=n} Y_k$.
S_n représente le nombre d'objets défectueux parmi les n premiers objets produits et T_n le nombre d'objets défectueux et contrôlés parmi les n premiers produits.
Quelles sont les lois de S_n et de T_n ?

3) a) Soit R la variable aléatoire égale au rang du premier objet défectueux et contrôlé.
Quelle est la loi de R ?
b) Montrer que :

$$P[(X_t=1) \mid (R=n+1)] = p(1-q)/(1-pq)$$

c) On note U la variable aléatoire égale au nombre d'objets défectueux non décelés par contrôle, avant que n' apparaisse le premier objet défectueux-contrôlé.
Quelle est la loi de U sachant (R=n+1) ?

4) a) Calculer $E[U \mid (R=n+1)]$, espérance de la variable aléatoire U sachant (R=n+1) .
b) En déduire la valeur de E (U) .
on pourra utiliser sans démonstration l'égalité :

$$E(U) = \sum_{n=0}^{\infty} E[U \mid (R=n+1)] P(R=n+1)$$

c) Application numérique : p=0,2 q=0,1 . Calculer $E[U \mid (R=n+1)]$ et E (U) .

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail